

Theta Series Harmonic Polynomial

Nazerke Bakytzhan

10/13/2017

```
M = ModularForms(Gamma1(3), prec=20)
M.basis()
[
1 + 12*q + 36*q^2 + 12*q^3 + 84*q^4 + 72*q^5 + 36*q^6 + 96*q^7 + 180*q^8 + 12*q^9 +
216*q^10 + 144*q^11 + 84*q^12 + 168*q^13 + 288*q^14 + 72*q^15 + 372*q^16 + 216*q^17 +
36*q^18 + 240*q^19 + O(q^20)
]

R.<q> = QQ[['q']]
sum([sum([(a^2 + a*b - b^2) * q^(a^2 + a*b + b^2) for a in range\
(-10,10)]) for b in range(-10,10)]) + O(q^50)
-2*q - 6*q^3 - 8*q^4 - 28*q^7 - 18*q^9 - 24*q^12 - 52*q^13 - 32*q^16 - 76*q^19 - 84*q^21 -
50*q^25 - 54*q^27 - 112*q^28 - 124*q^31 - 72*q^36 - 148*q^37 - 156*q^39 - 172*q^43 -
96*q^48 - 294*q^49 + O(q^50)

K = QuadraticField(-3)
K.discriminant()
-3

M3 = ModularForms(Gamma1(3), 3, prec=21)
M3.basis()[1]
q + 3*q^2 + 9*q^3 + 13*q^4 + 24*q^5 + 27*q^6 + 50*q^7 + 51*q^8 + 81*q^9 + 72*q^10 +
120*q^11 + 117*q^12 + 170*q^13 + 150*q^14 + 216*q^15 + 205*q^16 + 288*q^17 + 243*q^18 +
362*q^19 + 312*q^20 + O(q^21)

R.<q> = QQ[['q']]
sum([sum([(0*a^2 + 1 * a*b + (1/2)*b^2) * q^(a^2 + a*b + b^2) for a\
in range(-10,10)]) for b in range(-10,10)]) + O(q^50)
print "\n"
-4*M3.basis()[1]
O(q^50)

-4*q - 12*q^2 - 36*q^3 - 52*q^4 - 96*q^5 - 108*q^6 - 200*q^7 - 204*q^8 - 324*q^9 -
288*q^10 - 480*q^11 - 468*q^12 - 680*q^13 - 600*q^14 - 864*q^15 - 820*q^16 - 1152*q^17 -
972*q^18 - 1448*q^19 - 1248*q^20 + O(q^21)
```

```

R.<q> = QQ[['q']]
dd=40
sum([sum([(a^2 + 2 * a*b - b^2) * q^(a^2 + a*b + 2*b^2) for a in \
    range(-dd,dd)]) for b in range(-dd,dd)]) + O(q^100)
2*q - 6*q^2 + 10*q^4 - 14*q^7 - 6*q^8 + 18*q^9 - 12*q^11 + 42*q^14 - 22*q^16 - 54*q^18 +
36*q^22 + 36*q^23 + 50*q^25 - 70*q^28 - 108*q^29 + 90*q^32 + 90*q^36 - 76*q^37 + 116*q^43 -
60*q^44 - 108*q^46 + 98*q^49 - 150*q^50 - 12*q^53 + 42*q^56 + 324*q^58 - 126*q^63 -
182*q^64 - 236*q^67 + 228*q^71 - 54*q^72 + 228*q^74 + 84*q^77 - 188*q^79 + 162*q^81 -
348*q^86 + 36*q^88 + 180*q^92 - 294*q^98 - 108*q^99 + O(q^100)

```

```

M7 = ModularForms(Gamma1(7), 3, prec=21)
2*M7.basis()[0]
2*q - 6*q^2 + 10*q^4 - 14*q^7 - 6*q^8 + 18*q^9 - 12*q^11 + 42*q^14 - 22*q^16 - 54*q^18 +
O(q^21)

```

```

R.<q> = QQ[['q']]
dd=40
sum([sum([(2*a^2 + 7*a*b - 2*b^2) * q^(a^2 + a*b + 2*b^2) for a in \
    range(-dd,dd)]) for b in range(-dd,dd)]) + O(q^100)
4*q - 18*q^2 + 14*q^4 - 40*q^7 - 42*q^8 + 36*q^9 - 48*q^11 + 78*q^14 - 122*q^16 - 162*q^18 +
12*q^22 + 48*q^23 + 100*q^25 - 242*q^28 - 312*q^29 + 54*q^32 + 126*q^36 - 248*q^37 +
208*q^43 - 372*q^44 - 420*q^46 + 196*q^49 - 450*q^50 - 120*q^53 - 90*q^56 + 588*q^58 -
360*q^63 - 826*q^64 - 688*q^67 + 432*q^71 - 378*q^72 + 300*q^74 + 72*q^77 - 592*q^79 +
324*q^81 - 1140*q^86 - 516*q^88 - 36*q^92 - 882*q^98 - 432*q^99 + O(q^100)

```

```

M7.basis()
[
q - 3*q^2 + 5*q^4 - 7*q^7 - 3*q^8 + 9*q^9 - 6*q^11 + 21*q^14 - 11*q^16 - 27*q^18 +
O(q^21),
1 + 560*q^6 - 2058*q^7 + 4536*q^8 - 6412*q^9 + 7056*q^10 - 8526*q^11 + 12936*q^12 -
14406*q^13 + 8526*q^14 + 952*q^15 - 2016*q^16 - 4410*q^17 + 4900*q^18 + 4116*q^19 -
3528*q^20 + O(q^21),
q + 982/3*q^6 - 1345*q^7 + 3005*q^8 - 4163*q^9 + 4543*q^10 - 5524*q^11 + 25165/3*q^12 -
9590*q^13 + 5510*q^14 + 2792/3*q^15 - 1360*q^16 - 3010*q^17 + 9925/3*q^18 + 2660*q^19 -
2926*q^20 + O(q^21),
q^2 + 235/3*q^6 - 314*q^7 + 724*q^8 - 1028*q^9 + 1162*q^10 - 1374*q^11 + 5929/3*q^12 -
2198*q^13 + 1359*q^14 - 16/3*q^15 - 159*q^16 - 490*q^17 + 1300/3*q^18 + 644*q^19 -
259*q^20 + O(q^21),
q^3 - 15*q^6 + 84*q^7 - 192*q^8 + 281*q^9 - 300*q^10 + 363*q^11 - 511*q^12 + 588*q^13 -
348*q^14 + 17*q^15 + 48*q^16 + 141*q^17 - 75*q^18 - 168*q^19 + 84*q^20 + O(q^21),
q^4 - 19*q^6 + 84*q^7 - 188*q^8 + 272*q^9 - 301*q^10 + 364*q^11 - 518*q^12 + 588*q^13 -
348*q^14 - 8*q^15 + 64*q^16 + 140*q^17 - 110*q^18 - 168*q^19 + 105*q^20 + O(q^21),
q^5 - 20/3*q^6 + 22*q^7 - 44*q^8 + 59*q^9 - 63*q^10 + 82*q^11 - 392/3*q^12 + 154*q^13 -
82*q^14 - 85/3*q^15 + 32*q^16 + 70*q^17 - 275/3*q^18 - 27*q^19 + 77*q^20 + O(q^21)
]

```

```

R.<q> = QQ[['q']]
dd=50
sum([sum([(a^2 + a*b - b^2) * q^(2*a^2 + 2*a*b + 3*b^2) for a in \
    range(-dd,dd)]) for b in range(-dd,dd)]) + O(q^200)
print "\n"
sum([sum([(a^2 + 0*a*b - b^2) * q^(2*a^2 + 2*a*b + 3*b^2) for a in \
    range(-dd,dd)]) for b in range(-dd,dd)]) + O(q^200)
2*q^2 - 4*q^3 + 4*q^7 + 8*q^8 - 10*q^10 - 16*q^12 + 20*q^15 + 14*q^18 - 44*q^23 + 8*q^27 +
16*q^28 + 32*q^32 - 20*q^35 - 40*q^40 - 32*q^42 + 76*q^43 + 4*q^47 - 64*q^48 + 50*q^50 -
44*q^58 + 80*q^60 + 28*q^63 - 116*q^67 + 56*q^72 - 100*q^75 + 124*q^82 + 76*q^83 + 88*q^87
- 70*q^90 - 176*q^92 - 66*q^98 - 44*q^103 + 124*q^107 + 32*q^108 + 64*q^112 + 220*q^115 -
116*q^122 - 248*q^123 - 236*q^127 + 128*q^128 - 40*q^135 + 352*q^138 - 80*q^140 +
132*q^147 - 160*q^160 - 190*q^162 - 164*q^163 + 244*q^167 - 128*q^168 + 304*q^172 +
100*q^175 - 284*q^178 + 232*q^183 + 16*q^188 - 256*q^192 + O(q^200)

```

```

2*q^2 - 2*q^3 + 6*q^7 + 8*q^8 - 6*q^10 - 8*q^12 + 22*q^15 + 22*q^18 - 26*q^23 + 28*q^27 +
24*q^28 + 32*q^32 - 2*q^35 - 24*q^40 + 8*q^42 + 78*q^43 + 22*q^47 - 32*q^48 + 50*q^50 -
12*q^58 + 88*q^60 + 98*q^63 - 66*q^67 + 88*q^72 - 50*q^75 + 132*q^82 + 94*q^83 + 140*q^87
- 2*q^90 - 104*q^92 + 6*q^98 + 6*q^103 + 142*q^107 + 112*q^108 + 96*q^112 + 222*q^115 -
44*q^122 - 100*q^123 - 138*q^127 + 128*q^128 + 76*q^135 + 392*q^138 - 8*q^140 + 282*q^147
- 96*q^160 + 10*q^162 - 66*q^163 + 262*q^167 + 32*q^168 + 312*q^172 + 150*q^175 -
156*q^178 + 332*q^183 + 88*q^188 - 128*q^192 + O(q^200)

```

```

QuadraticField(-5).class_number()
2

```

```

BinaryQF_reduced_representatives(-20)
[x^2 + 5*y^2, 2*x^2 + 2*x*y + 3*y^2]

```

```

K = QuadraticField(-5)
K.class_group().gens()
(Fractional ideal class (2, a + 1),)

```

```

M = ModularForms(Gamma1(20), 3, prec = 34)
dd = 50
cand_mod = sum([sum([(a^2 + a*b - b^2) * q^(2*a^2 + 2*a*b + 3*b^2) \
    for a in range(-dd,dd)]) for b in range(-dd,dd)]) + O(q^200)
maybe_mod = (sum([sum([(a^2 + a*b - b^2) * q^(2*a^2 + 2*a*b + 3*b\
    ^2) for a in range(-dd,dd)]) for b in range(-dd,dd)]) + O(q^200))\
    .list()[0:34]

```

```

the_list = [M.basis()[i].padded_list(34) for i in range(len(M.basis\
    ())) ]
the_mat = matrix(the_list).transpose()
the_mat_inv = the_mat.inverse()
ans = the_mat_inv * matrix([maybe_mod]).transpose()

```

```
al = ans.list()
```

```
MM = ModularForms(Gamma1(20), 3, prec = 100)
```

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}\mathbf{M}. \text{basis}()$$

```
yes_mod = sum([a[i] * B[i] for i in range(len(B))])
```

```
[yes_mod.padded_list(80)[i] - cand_mod.list()[0:80][i] for i in \
    range(80)]
```

[illegible][illegible]

0, 0]

$$\text{RR}.\langle Q, A, B \rangle = \text{QQ}[['Q, A, B']]$$
$$\sum_{\substack{a \in [-10, 10] \\ b \in [-10, 10]}} \left(\sum_{a^2 + b^2 \leq 2} (Aa^2 + Bb^2 + (B-2A)/2) Q(a^2 + ab + b^2) \right) + O(Q^{50})$$
$$0 + O(Q, A, B)^{50}$$
$$\mathbf{R}.\langle \mathbf{Q} \rangle = \mathbf{QQ}[[\text{'Q'}]]$$
$$A_4 = 3$$

A5 = 7

$$A1 = -(1/4)*A4$$
$$A2 = -4 * A5$$
$$A_3 = (3/2) * A_4 - 6 * A_5$$
 $dd=40$
$$\sum \left(\left(\sum \left((A1 \cdot a^4 + A2 \cdot a^3 \cdot b + A3 \cdot a^2 \cdot b^2 + A4 \cdot a \cdot b^3 + A5 \cdot b^4) \cdot Q \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2) \right) \text{ for } a \text{ in range}(-dd, dd) \right) \text{ for } b \text{ in range}(-dd, dd) \right) + O(Q^{50})$$
$$\sum \left(\left[\sum \left(\left[(A1 \cdot \text{zre}(a,b))^4 + A2 \cdot \text{zre}(a,b)^3 \cdot \text{zim}(a,b) + A3 \cdot \text{zre}(a,b)^2 \cdot \text{zim}(a,b)^2 + A4 \cdot \text{zre}(a,b) \cdot \text{zim}(a,b)^3 + A5 \cdot \text{zim}(a,b)^4 \right] \cdot Q^{(a^2 + a \cdot b + b^2)} \right) \right] \text{ for } a \text{ in range}(-dd, dd) \right] \text{ for } b \text{ in range}(-dd, dd) \right] + O(Q^{50})$$
 $O(Q^{50})$
$$\begin{aligned}
& -240*Q - 2160*Q^3 - 3840*Q^4 - 23520*Q^7 - 19440*Q^9 - 34560*Q^{12} - 81120*Q^{13} - \\
& 61440*Q^{16} - 173280*Q^{19} - 211680*Q^{21} - 150000*Q^{25} - 174960*Q^{27} - 376320*Q^{28} - \\
& 461280*Q^{31} - 311040*Q^{36} - 657120*Q^{37} - 730080*Q^{39} - 887520*Q^{43} - 552960*Q^{48} - \\
& 1728720*Q^{49} + O(Q^{50})
\end{aligned}$$
 $O(Q^{50})$
$$R.\langle q \rangle = QQ[[\text{'q'}]]$$
$$(1/22) \sum_{a \in \text{range}(-30,30)} \left(\sum_{b \in \text{range}(-30,30)} (a^2 - a*b + b^2)^2 * q^{(a^2 + a*b + b^2)} \right) + O(q^{60})$$
$$q + 9q^3 + 16q^4 + 98q^7 + 81q^9 + 144q^{12} + 338q^{13} + 256q^{16} + 722q^{19} + 882q^{21} + 625q^{25} + 729q^{27} + 1568q^{28} + 1922q^{31} + 1296q^{36} + 2738q^{37} + 3042q^{39} + 3698q^{43} + 2304q^{48} + 7203q^{49} + 5408q^{52} + 6498q^{57} + O(q^{60})$$

```

M = ModularForms(Gamma1(3), 5, prec=50)
M.basis()
[
1 - 90*q^2 - 240*q^3 - 3744*q^5 - 3690*q^6 - 23130*q^8 - 19680*q^9 - 87840*q^11 -
57840*q^12 - 216180*q^14 - 153504*q^15 - 501120*q^17 - 295290*q^18 - 902304*q^20 -
576480*q^21 - 1679040*q^23 - 948330*q^24 - 2570580*q^26 - 1594320*q^27 - 4243680*q^29 -
2246400*q^30 - 5921370*q^32 - 3601440*q^33 - 8993088*q^35 - 4742880*q^36 - 11728980*q^38 -
6854880*q^39 - 16954560*q^41 - 8863380*q^42 - 21169440*q^44 - 12284064*q^45 -
29278080*q^47 - 14803440*q^48 + O(q^50),
q + 15*q^2 + 81*q^3 + 241*q^4 + 624*q^5 + 1215*q^6 + 2402*q^7 + 3855*q^8 + 6561*q^9 +
9360*q^10 + 14640*q^11 + 19521*q^12 + 28562*q^13 + 36030*q^14 + 50544*q^15 + 61681*q^16 +
83520*q^17 + 98415*q^18 + 130322*q^19 + 150384*q^20 + 194562*q^21 + 219600*q^22 +
279840*q^23 + 312255*q^24 + 390001*q^25 + 428430*q^26 + 531441*q^27 + 578882*q^28 +
707280*q^29 + 758160*q^30 + 923522*q^31 + 986895*q^32 + 1185840*q^33 + 1252800*q^34 +
1498848*q^35 + 1581201*q^36 + 1874162*q^37 + 1954830*q^38 + 2313522*q^39 + 2405520*q^40 +
2825760*q^41 + 2918430*q^42 + 3418802*q^43 + 3528240*q^44 + 4094064*q^45 + 4197600*q^46 +
4879680*q^47 + 4996161*q^48 + 5767203*q^49 + O(q^50)
]

def zre(x,y) : return -y
def zim(x,y) : return x-y

```